

Rappel:

f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

f est continue à droite en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

f est continue à gauche en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Exemple 5.13

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

f est continue, i.e. $\forall x_0 \in]0, 1[, f$ est continue en x_0 ,

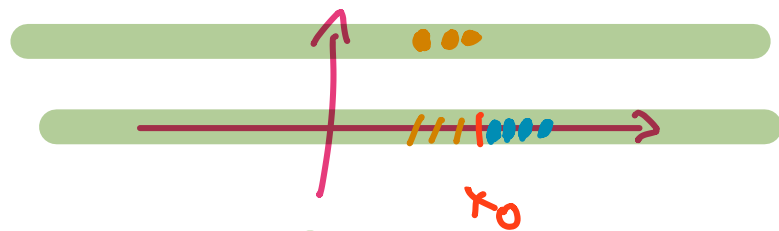
f est continue à droite en 0 et continue à gauche en 1

Caracrol des monstres

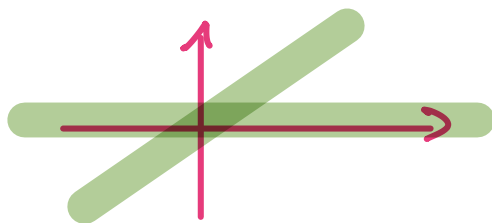
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
est continue nulle part

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
est continue en 0 et discontinue ailleurs

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$



$$f(x) = x \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$



$$|f(x)| = |x| \cdot \underbrace{\chi_{\mathbb{Q}}(x)}_{\leq 1} \leq |x| \rightarrow 0 \quad \text{si } x \rightarrow 0$$

car du

$\Rightarrow$
crit des 2
généralises

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Suite de l'exemple 5.13

Montrons que f est continue à droite en 0:

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. posons $\delta = \varepsilon^2$. Soit $x \in [0, \delta]$. Alors, on

a $0 \leq x \leq \delta$ donc,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = |\varepsilon| = \varepsilon.$$

ε quelconque,
on a le résultat

§ 5.2 Fonctions continues sur des intervalles

Définition 5.14 espace des fonctions C^0

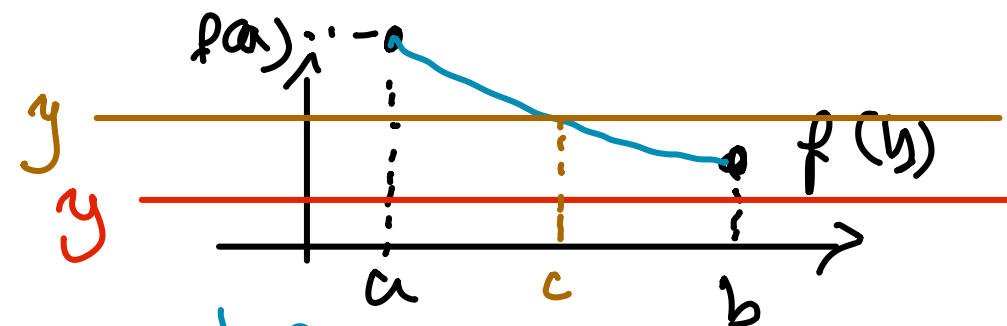
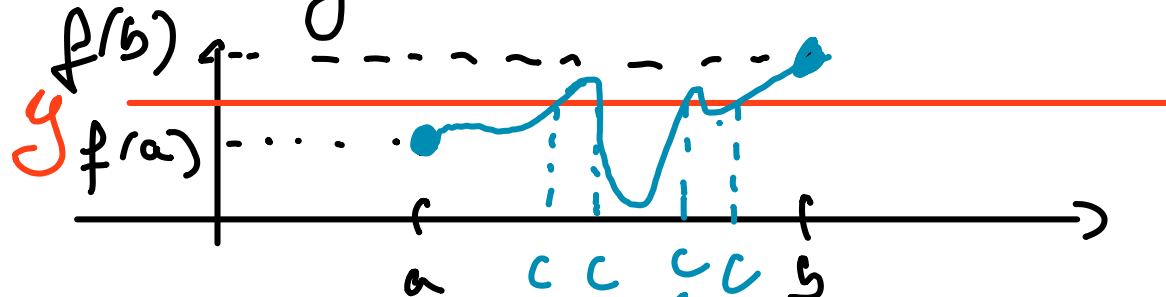
Soit I un intervalle. On définit l'espace des fonctions continues sur I par

$$C^0(I) = \{ f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est continue} \}$$

Théorème 5.15 (Théorème de la valeur intermédiaire)

Soient I un intervalle, $f \in C^0(I)$, et $a, b \in I$ tq $a < b$.
Alors, $\forall y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in [a, b]$ tq

$$f(c) = y$$



a priori plusieurs c possibles

Par exemple $\sinh(x) + \cos(x^2) - x^3 = 0$

si on trouve a tq $\sinh(a) + \cos(a^2) - a^3 < 0$
et b tq $\sinh(b) + \cos(b^2) - b^3 > 0$

$\Rightarrow \exists$ une solution x entre a & b .

Définition 5.16 (fonction qui prend son minimum & son max)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

(i) On dit que f prend son maximum sur D si $\exists x_0 \in D$ tq
 $\forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)$

On a alors que le supréum de f est un maximum
et on note
$$f(x_0) = \max_{x \in D} f(x)$$

(ii) On dit que f prend son minimum sur D si $\exists x_0 \in D$
tq $\forall x \in D, f(x) \geq f(x_0)$.

On a alors que l'infimum de f est un minimum
et on note $f(x_0) = \min_{x \in D} f(x)$.

Théorème 5.17

Soient I un intervalle et $f \in C^0(I)$. Alors,

- (i) L'ensemble image de f , $f(I) = \text{Im}(f)$ est un intervalle.
- (ii) Si f est strictement monotone et I est ouvert, l'ensemble image de f est un intervalle ouvert.
- (iii) Si I est un intervalle fermé, borné, i.e. $I = [a, b]$ avec $a < b$. Alors, f prend son min et son max sur

sur I et

$\text{Im}(f) = [\min_{x \in I} f(x), \max_{x \in I} f(x)]$ est un intervalle fermé, borné.

Exemples 5-18

(i) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$. Alors,

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$

thm (i)

(ii) Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors,

$$\text{Im}(f) =]1, +\infty[.$$

thm (i) & (ii)

(iii) Soit $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x) = x^2$.

$$\text{Im}(f) = [0, 1[$$

thm (i)

(iv) Soit $f:]-2, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$. Alors,

$$\text{Im}(f) =]-6, 6[$$

then (i)

(vi) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x)$. Alors,

$$\text{Im}(f) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

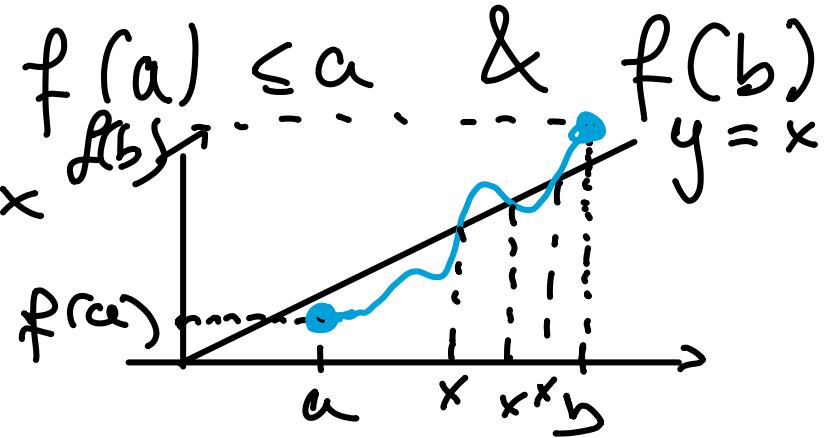
then (i), (ii)

Remarque 5.19

thm (iii) nous garantit l'existence d'un min & d'un max pour la fonction, mais ce nous dit pas comment les trouver. On verra ça dans la section § 7.1

Proposition 5.20

Soient $a < b$, $f \in C^0([a, b])$ tq $f(a) \leq a$ & $f(b) \geq b$.
Alors, $\exists x \in [a, b]$ tq $f(x) = x$



Chapitre 6 : La dérivée

§ 6.1 Définition & propriétés élémentaires

Définition 6.1 (Dérivée)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

(i) Soit $x_0 \in D$, supposons que f est définie au voisinage de x_0 . On dit que f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe.}$$

On note alors cette limite $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ qu'on appelle la dérivée de f en x_0 .

(ii) Supposons que D est ouvert. On dit que f est dérivable si $\forall x_0 \in D$, f est dérivable en x_0 .

La dérivée de f est alors la fonction $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $\rightarrow$ quotient différentiel

Exemples 6.2 :

(i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$

Alors, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^j x_0^{n-1-j}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^j x_0^{n-j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} x_0^j x_0^{n-j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} x_0^{n-1} \\ &= n \cdot x_0^{n-1} \\ \Rightarrow f'(x) &= n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

(ii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$.

Alors, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) - \sin(\beta) \\ = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos(x_0)$$

$\rightarrow 1$ "sin(y)"

avec $y \rightarrow 0$

$$\rightarrow \cos\left(\frac{x_0 + x_0}{2}\right) = \cos(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x + x_0}{2}\right)$$

$\uparrow$
cos continu!

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

(iii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. On a

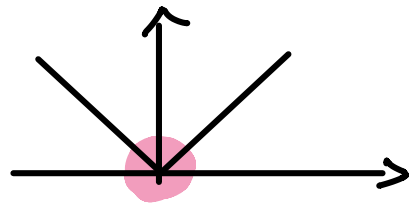
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -\frac{x}{x} & \text{si } x < 0 \\ +\frac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\& \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ n'existe pas & f n'est pas dérivable

en 0



$\hookrightarrow$ en 0, le graphe a "un angle"

Proposition 6.3

Soit $x_0 \in D$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 .

Si f est dérivable en x_0 , f est continue en x_0 .

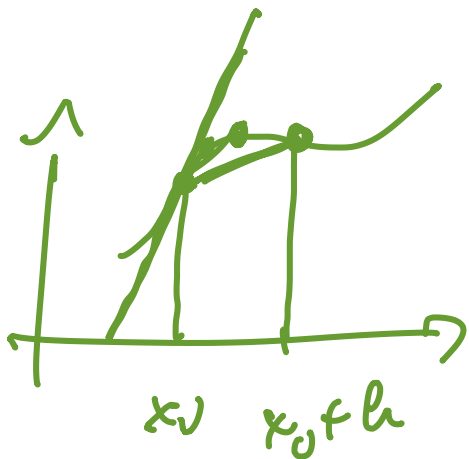
Preuve: *Faute du Loup*

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\text{faute}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + f(x) - f(x_0)$$

Faute du Biscar. $\rightarrow$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{f(x_0)}_{\rightarrow f(x_0)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow x_0 - x_0 = 0}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$



Proposition 6.4 :

Soient $x_0 \in D$, $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ définies au voisinage de x_0 et dérivables en x_0 . Soit encore

$\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 , $f(D) \subseteq F \subset \mathbb{R}$
et $h: F \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $f(x_0)$ et dérivable en $f(x_0)$

(i) $\alpha \cdot f$ est dérivable en x_0 et $(\alpha \cdot f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0)$.

(ii) $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(iii) $f \cdot g$ est dérivable en x_0 et $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(iv) Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

(v) $h \circ f$ est dérivable en x_0

$$\text{et } (h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

(vi) Si $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $f(x) = \varphi(x)$,
alors, φ est dérivable en x_0 et $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$

$$\arcsin :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \leftarrow$$

$x \mapsto \arcsin(x)$.

$$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

On a $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour $x \in]-1, 1[$.

(vi)
 $\Rightarrow$
(v)
 $\sin'(\arcsin(x)) \cdot \arcsin'(x) = 1$

$$\cos(\arcsin(x)) \cdot \arcsin'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$\Rightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}}$$

$$\arcsin(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Rightarrow \cos(\arcsin(x)) > 0$$

Un que $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$
on a $\cos(y) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(y)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$